

EINFÜHRUNG IN DIE MATRIZENRECHNUNG

L. Ressner — Ludwig-Maximilians-Universität München

Theorie der Finanzmärkte — Sommersemester 2007

1 Vektoren in \mathbb{R}^N

In der Finanzmarkttheorie ist es häufig zweckmäßig eine Menge von (reellen) Zahlen $x_n, n = 1, \dots, N$ zu einem geordneten N -Tupel

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

zusammenzufassen. Im Rahmen des 1. Kapitels der Vorlesung handelt es sich bei den Zahlen $x_n, n = 1, \dots, N$ um das Portefeuillegewicht oder um den erwarteten Ertrag des n -ten Wertpapiers. Geordnete N -Tupel dieser Form werden als Vektoren in \mathbb{R}^N bezeichnet. Die in der Vorlesung behandelten Vektoren sind **Spaltenvektoren**, d.h. sie bestehen aus einer Spalte und N Zeilen. Somit sind sie Vektoren der Ordnung $N \times 1$. Eine weitere Art von Vektor sind sog. **Zeilenvektoren**, die aus einer Zeile und N Spalten bestehen. Die Ordnung dieser Vektoren beträgt $1 \times N$. Indem ein Spaltenvektor \mathbf{x} **transponiert** wird kann er in einen Zeilenvektor umgeformt werden:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}^T = [x_1 \cdots x_N].$$

Die Spalte wird in eine Zeile umgeformt, indem das erste Element der Spalte zu dem ersten Element der Zeile, das zweite Element der Spalte zu dem zweiten Element der Zeile, usw. wird. Um die Transponierung zu kennzeichnen wird der Vektor mit T versehen. Analog kann ein Zeilenvektor in einen Spaltenvektor umgeformt bzw. transponiert werden.

Vektorrechnung

Wir definieren für Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ und den Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ folgende Operationen:

(i) Vektoraddition:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_N + y_N \end{bmatrix}$$

(ii) Multiplikation mit einem Skalar:

$$\lambda \mathbf{x} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_N \end{bmatrix}$$

Wichtige Vektoren

Oft verwendete Vektoren sind

- der Nullvektor,
- der Einsvektor
- und der Einheitsvektor.

Der Nullvektor der Ordnung $N \times 1$ ist ein Spaltenvektor, dessen Elemente ausschließlich gleich null sind:

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Der Einsvektor der Ordnung $N \times 1$ ist ein Spaltenvektor, dessen Elemente ausschließlich gleich eins sind:

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Der n -te Einheitsvektor der Ordnung $N \times 1$ ist ein Spaltenvektor, dessen n -tes Element gleich eins und alle anderen Elemente gleich null sind:

$$\mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rechenregeln für Vektoren in \mathbb{R}^N

Für die Vektoren in \mathbb{R}^N gelten die folgenden Rechenregeln:

Satz 1 *Rechenregeln für Vektoren in \mathbb{R}^N :*

Für beliebige Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^N$ und Skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

1. Assoziativgesetz für die Addition: $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$
2. Kommutativgesetz: $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$
3. $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$
4. $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$
5. Distributivgesetze für die skalare Multiplikation: $(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}$ bzw. $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$
6. Assoziativgesetz für die skalare Multiplikation: $(\lambda\mu)\mathbf{x} = \lambda(\mu\mathbf{x})$
7. $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$

2 Reelle Matrizen

Wie Sie bereits wissen, zielt die Mittelwert-Varianz-Analyse bei der Ermittlung des effizienten Portefeuilles nicht nur auf die erwarteten Erträge der Wertpapiere ab. Auch die Risikoeigenschaften eines Wertpapiers – diese werden durch seine Varianz und seine Kovarianz mit den anderen Wertpapieren des Portefeuilles bestimmt – fließen in die Berechnung der optimalen Portefeuillegewichte mit ein.

Für diese Analyse erweist es sich als zweckmäßig, die Risikokenngrößen der Wertpapiere eines Portefeuilles in einem geordneten Schema anzuordnen. Allgemein besteht dieses Schema aus M Zeilen (Anzahl der Untersuchungseinheiten) und N Spalten (Anzahl der untersuchten Merkmale).

Dies führt zu folgender Definition:

Definition 1 *Reelle Matrix:*

Ein nach M Zeilen und N Spalten geordnetes Schema \mathbf{A} von $M \cdot N$ Elementen $a_{mn} \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{M1} & \cdots & a_{MN} \end{bmatrix}$$

heißt reelle Matrix der Ordnung $M \times N$ oder kurz $M \times N$ -Matrix. Kurzschreibweise:

$$\mathbf{A} = (a_{mn})$$

Die Zeilen von \mathbf{A} können dabei als Vektoren des \mathbb{R}^N (Zeilenvektoren) und die Spalten als Vektoren des \mathbb{R}^M (Spaltenvektoren) angesehen werden.

Im Folgenden wird das Konzept der quadratischen Matrix eingeführt, das im Rahmen von Kapitel 1 behandelt wird.

Definition 2 Quadratische Matrix:

Eine Matrix \mathbf{A} heißt quadratisch, falls sie von der Ordnung $N \times N$ ist. Die Diagonale, die aus den Elementen a_{11}, \dots, a_{NN} besteht, heißt Hauptdiagonale.

Eine wichtige quadratische Matrix ist die sog. Einheitsmatrix \mathbf{I} , deren Elemente auf der Hauptdiagonale gleich eins und ober- bzw. unterhalb der Hauptdiagonale gleich null sind:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Einheitsmatrix ist ebenso wie die Varianz-Kovarianzmatrix \mathbf{V} symmetrisch. Bevor wir erklären können, was unter der Symmetrie einer Matrix zu verstehen ist, muß zunächst das Konzept der Transposition eräutert werden.

Definition 3 Transponierte Matrix:

Sei \mathbf{A} eine $M \times N$ Matrix. Dann ist die transponierte Matrix \mathbf{A}^T definiert als diejenige Matrix, die man durch das Vertauschen der Zeilen und Spalten von \mathbf{A} erhält, d.h.

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{M1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1N} & a_{2N} & \cdots & a_{MN} \end{bmatrix}.$$

Sie ist also von der Ordnung $N \times M$.

Anders ausgedrückt funktioniert die Transposition einer Matrix so:

- 1. Zeile wird zur 1. Spalte
- 2. Zeile wird zur 2. Spalte
- usw.

Beispiel 2.1:

Betrachten Sie die 3×4 -Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 9 & 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Die transponierte von \mathbf{A} ist gegeben durch die 4×3 -Matrix

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Nun können wir das Konzept der Symmetrie einer Matrix erläutern:

Definition 4 *Symmetrische Matrix:*

Eine Matrix \mathbf{A} heißt *symmetrisch*, wenn $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ gilt.

Übung 2.1:

Zeigen Sie, dass die Einheitsmatrix und die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 5 \\ 1 & 7 & 6 & 6 \\ 8 & 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

symmetrisch sind.

Eine wichtige symmetrische Matrix, die Sie im Vorlesungsskript vorfinden, ist \mathbf{V} , die Varianz-Kovarianzmatrix der Wertpapiere eines Portefeuilles

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{N1} & \cdots & \sigma_{NN} \end{bmatrix}.$$

In diesem Fall sind die Wertpapiere die Untersuchungseinheiten und somit entspricht ihre Anzahl (N) den Zeilen der Matrix \mathbf{V} . Dabei enthält Zeile 1 die Merkmale von Wertpapier 1, Zeile 2 die Merkmale von Wertpapier 2, usw. Das Merkmal eines Wertpapiers, das für uns in der Mittelwert-Varianz-Analyse von Interesse ist, ist die Kovarianz eines Wertpapiers mit allen Wertpapieren, die in dem Portefeuille gehalten werden können.

- Element σ_{11} (1. Zeile, 1. Spalte) gibt somit die Kovarianz von Wertpapier 1 mit sich selbst an. (Wie Sie aus der Vorlesung wissen, entspricht dies der Varianz von Wertpapier 1.)
- Element σ_{23} (2. Zeile, 3. Spalte) entspricht der Kovarianz von Wertpapier 2 mit Wertpapier 3. Aufgrund der Symmetrie von \mathbf{V} sind die Elemente σ_{23} und σ_{32} identisch.

Im Folgenden werden ähnlich wie für die Vektoren des \mathbb{R}^N die Addition zweier Matrizen und die Multiplikation eines Skalars mit einer Matrix definiert.

Definition 5 *Summe und skalare Multiplikation von Matrizen:*

Die *Summe* $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ zweier $M \times N$ -Matrizen $\mathbf{A} = (a_{mn})$ und $\mathbf{B} = (b_{mn})$ ist definiert als:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} \equiv (a_{mn} + b_{mn}).$$

Die *Multiplikation* von \mathbf{A} mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ ist definiert als:

$$\lambda \mathbf{A} \equiv (\lambda a_{mn}).$$

Übung 2.2:

Betrachten Sie die Matrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ und } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie:

- $\mathbf{A} + \mathbf{B}$,
- $\mathbf{B} - \mathbf{A}$,
- $3\mathbf{A}$.

Weitere fundamentale Rechenregeln für Matrizen sind in dem folgenden Satz zusammengefasst:

Satz 2 Rechenregeln für Matrizen:

Für beliebige $M \times N$ Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ und beliebige Skalare $r, k \in \mathbb{R}^N$ gilt:

1. Assoziativgesetz für die Addition: $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$
2. Kommutativgesetz: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
3. $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$, wobei $\mathbf{0}$ diejenige Matrix ist, deren sämtliche Einträge gleich null sind.
4. $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$
5. Distributivgesetze für die skalare Multiplikation: $(k + r)\mathbf{A} = k\mathbf{A} + r\mathbf{A}$ bzw. $k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$
6. Assoziativgesetz für die skalare Multiplikation: $(kr)\mathbf{A} = k(r\mathbf{A})$
7. $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$
8. $0\mathbf{A} = \mathbf{0}$
9. $(k\mathbf{A})^T = k\mathbf{A}^T$
10. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

Bevor wir zu der Matrizen- und Vektorenmultiplikation übergehen, werden zunächst zwei wichtige Kennzahlen von Matrizen erklärt: die Determinante und der Rang.

Die Determinante einer Matrix:

Die Determinante einer Matrix ist ein Skalar, der aus allen Elementen einer Matrix berechnet wird. Sie existiert nur für quadratische Matrizen und wird mit $|\mathbf{A}|$ bzw. $\det(\mathbf{A})$ bezeichnet.

Zuerst berechnen wir die Determinante der 2×2 Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Die Determinante von \mathbf{A} ist durch folgende Beziehung gegeben:

$$|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Die Determinante einer 3×3 Matrix

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix},$$

läßt sich folgendermaßen (nach der Regel von Sarrus) berechnen:

$$|\mathbf{B}| = b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - b_{31}b_{22}b_{13} - b_{32}b_{23}b_{11} - b_{33}b_{21}b_{12}.$$

Allgemein gilt: $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T|$.

Das Konzept des Rangs einer Matrix bedarf noch der Definition des Begriffs der linearen (Un)Abhängigkeit.

Lineare Abhängigkeit:

Zwei Vektoren \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 sind **linear abhängig** wenn ein Vektor das skalare Vielfache des anderen ist. D.h. es existiert ein Skalar λ , so dass:

$$\mathbf{x}_1 = \lambda \mathbf{x}_2.$$

Analog sind zwei Vektoren **linear unabhängig**, wenn kein λ existiert, für das

$$\mathbf{x}_1 = \lambda \mathbf{x}_2,$$

gilt. Generell gilt: Die n Vektoren $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ sind linear unabhängig, wenn

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$$

nur dann gilt, wenn

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

Für den Fall, dass $\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$ gilt und einige der λ_i 's ungleich null sind, dann kann ein Vektor als Linearkombination der anderen $n - 1$ Vektoren dargestellt werden.

Der Rang einer Matrix:

Sei \mathbf{A} eine $M \times N$ -Matrix. Die Anzahl der linear unabhängigen Spalten von \mathbf{A} wird als der Spaltenrang von \mathbf{A} bezeichnet. Analog wird die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen von \mathbf{A} als der Zeilenrang von \mathbf{A} bezeichnet. Da der Zeilen- und der Spaltenrang einer Matrix identisch sind, wird vereinfachend vom Rang der Matrix \mathbf{A} gesprochen. Dieser wird notationell mit $\text{rg}(\mathbf{A})$ bezeichnet.

Dabei gelten die folgenden Regeln:

- Wenn \mathbf{A} eine Matrix der Ordnung $M \times N$ ist, dann gilt: $\text{rg}(\mathbf{A}) \leq \min(M, N)$;
- $\text{rg}(\mathbf{A}) = \text{rg}(\mathbf{A}^T)$;
- Wenn \mathbf{A} eine Matrix der Ordnung $N \times N$ ist und $\det \mathbf{A} = 0$ ist, dann gilt: $\text{rg}(\mathbf{A}) < N$.

3 Matrix- und Vektormultiplikation

Definition 6 *Matrixmultiplikation:*

Das Produkt der $M \times N$ -Matrix $\mathbf{A} = (a_{mn})$ mit der $N \times P$ -Matrix $\mathbf{B} = (b_{np})$, $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, ist die $M \times P$ -Matrix

$$\mathbf{C} = (c_{mp}) \quad \text{mit} \quad c_{mp} = \sum_{k=1}^N a_{mk}b_{kp}.$$

Die Multiplikation läuft nach dem Schema Zeile mal Spalte ab. D.h.: Element c_{11} ergibt sich aus dem Produkt der ersten Zeile von \mathbf{A} und der ersten Spalte von \mathbf{B} . Das Produkt der ersten Zeile von \mathbf{A} und der ersten Spalte von \mathbf{B} wiederum ergibt sich indem die einzelnen Elemente der Zeile bzw. Spalte miteinander multipliziert, d.h.: $a_{11}b_{11}, \dots, a_{1N}b_{N1}$, und die Produkte anschließend summiert werden. Diese Vorgehensweise wird in Beispiel 3.1 detailliert dargestellt.

Beispiel 3.1:

Betrachten Sie die Matrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \\ -1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 & -1 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 14 \\ 3 & 4 \\ 11 & 14 \end{bmatrix}.$$

Neben der Durchführung der Multiplikation (Faustregel: 1. Zeile mal 1. Spalte usw.) ist die Ordnung der miteinander multiplizierten Matrizen ausschlaggebend

- dafür, ob die Multiplikation überhaupt zulässig ist;
- für die Ordnung der entstehenden Matrix.

Beispiel 3.2:

Betrachten Sie folgende Beispiele:

- \mathbf{AB} , wobei \mathbf{A} und \mathbf{B} Matrizen der Ordnung 3×3 sind,
- \mathbf{CD} , wobei Matrix \mathbf{C} eine Matrix der Ordnung 3×3 und \mathbf{D} eine Matrix der Ordnung 5×3 ist.
- \mathbf{Cx} , wobei \mathbf{C} eine Matrix der Ordnung 3×3 und \mathbf{x} ein Vektor der Ordnung 3×1 ist.

Damit die Multiplikation zweier Matrizen überhaupt zulässig ist, muß die Zahl der Spalten der linken Matrix gleich der Zahl der Zeilen der rechten Matrix sein. Wie sieht das in den oben angeführten Beispielen aus?

- Fall (i): Das Produkt ist definiert, da die Anzahl der Spalten von \mathbf{A} (3) gleich der Anzahl der Zeilen von \mathbf{B} (3) ist.
- Fall (ii): Das Produkt ist nicht definiert, da die Anzahl der Spalten von \mathbf{C} (3) nicht gleich der Anzahl der Zeilen von \mathbf{D} (5) ist. Das Produkt \mathbf{CD}^T hingegen wäre definiert.

- Fall (iii): Das Produkt ist definiert, da die Anzahl der Spalten von \mathbf{C} (3) gleich der Anzahl der Zeilen des Spaltenvektors \mathbf{x} (3) ist. Die Regeln der Matrizenmultiplikation gelten unumschränkt für die Multiplikation von Vektoren bzw. von Matrizen und Vektoren.

Gegeben, dass das Produkt zweier Matrizen (Vektoren) definiert ist, ergibt sich die Ordnung der resultierenden Matrix aus den Zeilen der linken Matrix und den Spalten der rechten Matrix. Betrachten Sie wieder die oben angeführten Beispiele.

- Fall (i): Es entsteht eine 3×3 Matrix, da die Anzahl der Zeilen von \mathbf{A} und die Anzahl der Spalten von \mathbf{B} gleich drei ist.
- Fall (ii): Betrachten Sie das Produkt \mathbf{CD}^T . Die entstehende Matrix ist von der Ordnung 3×5 .
- Fall (iii): Es entsteht eine 3×1 Matrix bzw. ein Spaltenvektor.

Die aus Beispiel 3.2 gewonnenen Erkenntnisse werden in dem folgenden Satz zusammengefaßt:

Satz 3 *Die Multiplikation zweier Matrizen ist nur dann definiert, wenn die Anzahl der Spalten der ersten Matrix mit der Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix übereinstimmt. Wenn die Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} von der Ordnung $M \times N$ und $N \times P$ sind, dann ist das Matrixprodukt \mathbf{AB} definiert und von der Ordnung $M \times P$.*

Wie im Kontext von Beispiel 3.2 bereits erwähnt wurde, lassen sich die Regeln der Matrizenmultiplikation ohne weiteres auf die Multiplikation von Vektoren übertragen.

Definition 7 Inneres Produkt:

Das Innere Produkt oder Skalarprodukt der Vektoren \mathbf{x}, \mathbf{y} , wobei \mathbf{x} und \mathbf{y} Vektoren der Ordnung $N \times 1$ sind, ist definiert als:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_N y_N = \sum_{i=1}^N x_i y_i.$$

4 Matrixinversion

Bislang wurde noch keine Operation eingeführt, die man als Matrixdivision bezeichnen könnte. Betrachten Sie die Division zweier Skalare: $\frac{a}{b} = ab^{-1}$. Des Weiteren gilt: $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$, für $a \neq 0$. Matrixdivision als solches ist nicht definiert, aber wir sprechen von der Inverse einer $N \times N$ -Matrix \mathbf{A} , die mit \mathbf{A}^{-1} bezeichnet wird, wenn sie folgende Eigenschaft besitzt:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

Die Inverse ist nur für quadratische Matrizen definiert. Die Inverse einer quadratischen Matrix existiert, wenn $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ ist.

4.1 Inversion von 2×2 -Matrizen

Betrachten Sie die 2×2 -Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Die Inverse von \mathbf{A} ist durch folgende Beziehung gegeben:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

In Worten ausgedrückt erhält man die Inverse einer 2×2 -Matrix, indem

1. die Matrix durch ihre Determinante geteilt wird,
2. die Elemente auf der Hauptdiagonale vertauscht werden
3. und das Vorzeichen der Elemente auf der Nebendiagonalen umgekehrt wird.

4.2 Inversion von 3×3 -Matrizen

Im Rahmen der Vorlesung Theorie der Finanzmärkte setzen Sie sich im Wesentlichen mit der Inversion von 3×3 -Matrizen auseinander. Ein in diesem Rahmen häufig angewendeter Lösungsansatz ist die **Inversen-Bestimmung mit vollständiger Elimination**.

Gegeben sei eine quadratische Matrix \mathbf{A} , zu der die Inverse \mathbf{A}^{-1} existiert. Die Inverse kann folgendermaßen bestimmt werden:

- (1) Erweiterung der Matrix \mathbf{A} um eine Einheitsmatrix geeigneter Ordnung zu $(\mathbf{A}|\mathbf{I})$.
- (2) Transformation der erweiterten Matrix $(\mathbf{A}|\mathbf{I})$ durch Anwendung von Zeilenoperationen derart, dass anstelle von \mathbf{A} die Einheitsmatrix steht. Im rechten Teil der erweiterten Matrix steht dann die Inverse: $(\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1})$.

Die Transformation der erweiterten Matrix kann systematisch dadurch erfolgen, dass man sich in den Spalten des linken Teils nacheinander geeignete Einheitsvektoren erzeugt, und zwar zuerst die 1 an der entsprechenden Stelle und danach die Nullen. Das folgende Beispiel zeigt die Einzelheiten des Vorgehens.

Beispiel 4.2.1:

Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 9 & 3 & 20 \end{bmatrix}.$$

(1) Erweiterung der Matrix um die Einheitsmatrix gleicher Ordnung:

$$(\mathbf{A}|\mathbf{I}) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 3 & 20 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

(2) Transformation der erweiterten Matrix:

Iteration 1:

Indem die erste Zeile mit dem Skalar $\frac{1}{3}$ multipliziert wird:

$$\left[1 \quad \frac{1}{3} \quad 2 \quad | \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad 0 \right],$$

wird ein Einheitsvektor mit dem Element $a_{11} = 1$ erzeugt.

Addition des (-2) -fachen dieser neuen ersten Zeile mit der 2. Zeile und des (-9) -fachen mit der dritten Zeile ergibt die folgende erweiterte Matrix:

$$(\mathbf{A}|\mathbf{I}) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & 2 & | & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 & | & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & -3 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Iteration 2:

Indem die zweite Zeile mit dem Skalar $\frac{3}{4}$ multipliziert wird:

$$\left[0 \quad 1 \quad 0 \quad | \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{3}{4} \quad 0 \right],$$

wird ein Einheitsvektor mit dem Element $a_{22} = 1$ erzeugt.

Addition des $(-\frac{1}{3})$ -fachen dieser neuen zweiten Zeile mit der 1. Zeile ergibt die folgende erweiterte Matrix:

$$(\mathbf{A}|\mathbf{I}) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & | & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & -3 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Iteration 3:

Indem die dritte Zeile mit dem Skalar $\frac{1}{2}$ multipliziert wird:

$$\left[0 \quad 0 \quad 1 \quad | \quad -\frac{3}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2} \right],$$

wird ein Einheitsvektor mit dem Element $a_{33} = 1$ erzeugt. Indem die erste Zeile mit dem -2 -fachen dieser neuen dritten Zeile addiert wird ergibt sich schließlich die folgende erweiterte Matrix:

$$(\mathbf{A}|\mathbf{I}) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & | & \frac{7}{2} & -\frac{1}{4} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right].$$

Jetzt steht in der linken Hälfte der erweiterten Matrix eine Einheitsmatrix. Der rechte Teil der erweiterten Matrix stellt die Inverse \mathbf{A}^{-1} dar, mit

$$\mathbf{A}^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{7}{2} & -\frac{1}{4} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right].$$

Das Beispiel zeigt, dass man nicht mehr Iterationen braucht als die Matrix Zeilen bzw. Spalten hat. Ob man die Inverse richtig berechnet hat, kann man dadurch überprüfen, dass man die ursprüngliche Matrix und die Inverse miteinander multipliziert. Das Ergebnis muss dann die Einheitsmatrix sein.

Beispiel 4.2.1 (Fortsetzung):

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 9 & 3 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{1}{4} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Das beschriebene Verfahren zur Matrizeninversion durch Anwendung von Zeilenoperation ist so aufgebaut, dass die Umformung der Matrix spaltenweise geschieht. In der linken Hälfte der erweiterten Matrix werden die Spalten nacheinander zu Einheitsvektoren umgeformt. Dabei erzeugt man immer zuerst die Eins und anschließend die Nullen. Dieses systematische Vorgehen ist nicht zwingend. Bei der Erzeugung der Einheitsmatrix in der linken Hälfte der erweiterten Matrix kann man grundsätzlich die Elemente in beliebiger Reihenfolge entsprechend umwandeln. Dieses unsystematische Vorgehen kann mitunter schneller zum Ziel, aber auch zu Fehlern führen. Sie sollten von dem systematischen Vorgehen nur abweichen, wenn Sie eine gewisse Übung und Sicherheit im Vorgehen der Zeilenoperationen besitzen.

4.3 Matrizenmultiplikation: weitere Rechenregeln

Nachdem das Konzept der Matrizeninversion in den vorhergehenden Abschnitten eingeführt worden ist, werden in dem folgenden Satz weitere häufig verwendete Regeln der Matrizenmultiplikation zusammengefaßt.

Satz 4 Rechenregeln für Matrizen:

Für die Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} und \mathbf{C} geeigneter Ordnung gilt:

1. $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$
2. $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$
3. $(\mathbf{ABC})^T = \mathbf{C}^T\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$
4. $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$
5. $|\lambda\mathbf{A}| = \lambda^N|\mathbf{A}|$, wobei N der Anzahl der Zeilen der Matrix \mathbf{A} entspricht.
6. $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$
7. \mathbf{AA}^T und $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ sind symmetrisch.

5 Definitheit und Differentiation

5.1 Definitheit

Betrachten Sie eine $N \times N$ -Matrix \mathbf{A} und beliebige $N \times 1$ -Vektoren \mathbf{x} .

Definition 8 Definitheit:

Die Matrix \mathbf{A} ist

- positiv definit, wenn $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ für $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$;
- positiv semi-definit, wenn $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$ für $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$;
- negativ definit, wenn $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} < 0$ für $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$;

- *negativ semi-definit, wenn $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \leq 0$ für $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$;*
- *indefinit, wenn keine der vorhergehenden Bedingungen erfüllt ist.*

Bevor gezeigt wird, wie man die Definitheit einer Matrix überprüfen kann, wird das Konzept des **Minors** eingeführt.

Definition 9 Minoren:

Sei \mathbf{A} eine quadratische $N \times N$ Matrix und sei \mathbf{A}_{nn} die Teilmatrix von \mathbf{A} , die man durch Streichen der n -ten Zeile und der n -ten Spalte erhält. Die Determinante von \mathbf{A}_{nn} heißt Minor des Elements a_{nn} von \mathbf{A} .

Satz 5 Definitheit und Hauptminoren:

Für die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2N} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix},$$

gelten die folgenden Regeln:

1. Wenn $|\mathbf{A}_{nn}| > 0$ für alle $n = 1, \dots, N$, dann ist \mathbf{A} positiv definit.
2. Wenn $|\mathbf{A}_{nn}| \geq 0$ für alle $n = 1, \dots, N$, dann ist \mathbf{A} positiv semi-definit.
3. Wenn $(-1)^n |\mathbf{A}_{nn}| > 0$ für alle $n = 1, \dots, N$, dann ist \mathbf{A} negativ definit. In Worten ausgedrückt ist diese Bedingung erfüllt, wenn die Hauptminoren der Matrix ihr Vorzeichen wechseln, wobei das Vorzeichen des ersten Hauptminors negativ sein muß.
4. Wenn $(-1)^n |\mathbf{A}_{nn}| \geq 0$ für alle $n = 1, \dots, N$, dann ist \mathbf{A} negativ semi-definit.

Aus Bedingung 1 folgt für die Varianz-Kovarianz-Matrix \mathbf{V} , dass diese positiv definit ist, wenn sie vollen Rang besitzt. Dies ist der Fall, wenn die Risikokenngrößen aller Wertpapiere eines Portefeuilles linear unabhängig sind.

5.2 Einige Differentiationsregeln

Zuletzt erfolgt eine Auflistung der in der Vorlesung verwendeten Differentiationsregeln. Betrachten Sie den $N \times 1$ -Vektor \mathbf{a} und die $N \times N$ -Matrix \mathbf{A} . Dann gilt für beliebige $N \times 1$ -Vektoren \mathbf{x} :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{a}^T \mathbf{x}}{d\mathbf{x}} &= \frac{d\mathbf{x}^T \mathbf{a}}{d\mathbf{x}} = \mathbf{a} \\ \frac{d\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}}{d\mathbf{x}} &= 2\mathbf{A} \mathbf{x} \end{aligned}$$